

Stoßsimulation mittels einseitiger Feder-Dämpfer Kontakte

Bernd Waltersberger*, Rainer Keppler und Jörg Wauer

Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Germany

Die Verwendung von Feder-Dämpfer Kontaktmodellen bei der Stoßsimulation ist häufig kontinuumsmechanisch begründet oder beispielsweise motiviert durch die Verwendung von Penalty Verfahren zur rechenstechnischen Behandlung der Kontaktnebenbedingung. In dieser Arbeit wird untersucht, wie sich die Wahl der Kontaktbedingung aus den Alternativen **Orts-** bzw. **Kraftbedingung** (d.h. Kontakt wird angenommen, solange *Eindringen vorliegt* bzw. *die Kontaktkraft eine Druckkraft ist*) auf das Haftverhalten des Kontaktes auswirkt. Die Problematik wird anhand eines geradlinigen Stoßes eines Massepunktes auf ein Feder-Dämpfer System untersucht, nachdem einführend ein einfaches kontinuumsmechanisches Modell eines axialen Stoßes eines Massepunktes auf einen Stab behandelt wird. Bei beiden Untersuchungen wird eine den Massepunkt belastende, konstante Kraft berücksichtigt, die besonders bei kleinen Stoßgeschwindigkeiten nicht mehr vernachlässigt werden darf. Für das Feder-Dämpfer Kontaktmodell können die maßgeblichen Parameter und mit diesen die Bereiche unterschiedlichen Haftverhaltens angegeben werden. Abschließend wird gezeigt, wie die Überlegung zum einfachen geradlinigen Stoßvorgang auf Einfachstöße in der Mehrkörperdynamik nutzbringend angewandt werden kann.

© 2004 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

1 Axialer Stoß auf Stab

Stöße auf Stäbe wurden in der Vergangenheit ausgiebig behandelt, vgl. [3]. Die Kritik an der zu idealisierenden Modellierung durch einparametrische Kontinua ist bekannt, vgl. [1, 2], dennoch eignet sich das Modell, kontinuumsmechanische Wellenausbreitungseffekte beim Stoß wenigstens anzudeuten.

Eine mit der normierten Kraft f belastete diskrete Masse (normiert α) stößt am Ort $\xi = 0$ axial auf das freie Ende eines ruhenden Stabs, der bei $\xi = 1$ fest eingespannt ist. Zwischen Masse und Stab wird eine lineare Kontaktfeder (Steifigkeit normiert κ) angenommen, für die im Idealfall $\kappa \rightarrow \infty$ gilt. Nach Laplace Transformation erhält man die Bewegungsgleichungen einschließlich Rand- und Anfangsbedingungen, wobei die Verschiebungen auf das Produkt der Aufprallgeschwindigkeit mit einer typischen Kreisfrequenz bezogen sind:

$$\begin{aligned} \text{Stab: } s^2 W(\xi, s) - \frac{\partial^2 W(\xi, s)}{\partial \xi^2} &= 0, & \text{Masse: } \alpha s^2 Y(s) + \kappa Y(s) - \frac{f}{s} - \kappa W(0, s) - \alpha &= 0, \\ \frac{\partial W(\xi, s)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + \frac{f}{s} - \alpha s^2 Y(s) + \alpha &= 0, & W(1, s) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Das vorliegende Randwertproblem ist im Bildbereich geschlossen lösbar, die dabei auftretenden nicht gebrochen-rationalen Lösungen werden in $\Delta = e^{-s}$ (d.h. Zeitverschiebung im Zeitbereich aufgrund Wellenausbreitung) in eine absolut konvergente Potenzreihe entwickelt. Der Kürze halber gelte der Idealfall $\kappa \rightarrow \infty$, und ferner wird nur die Lösung für die Verschiebung $Y(s)$ normiert im Bildbereich angegeben:

$$Y(s) = \frac{\alpha s + f}{s^2(\alpha s + 1)} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(\alpha s + f)(\alpha s - 1)^{n-2}}{s^2(\alpha s + 1)^n} \Delta^{2(n-1)}. \quad (2)$$

Ein analoges Vorgehen liefert die Reihenentwicklung der Kontaktkraft $N(s) = -\frac{\partial W(\xi, s)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}$.

Parameterstudien nach gliedweiser Rücktransformation in den Zeitbereich zeigen, dass die ersten Nulldurchgänge der Kontaktkraft bzw. der Verschiebung für große Massen α und kleine Anpresskräfte f dicht zusammenfallen, Kraft- bzw. Ortsbedingung also nahezu gleichwertig sind. Mit zunehmender Anpresskraft muss diese Schlussfolgerung aufgegeben werden, es zeigt sich, dass erheblich unterschiedliche Kontaktzeiten mit Orts- bzw. Kraftbedingung auftreten.

2 Stoß auf Feder-Dämpfer System

Solange Kontakt besteht, liegt ein linearer, gedämpfter Schwinger vor. Nach Normierung hängt das Schwingungsverhalten des Systems nur noch vom Lehrschen Dämpfungsmaß D und der auf die Dämpferkraft zum Zeitpunkt des Aufpralls bezogenen Anpresskraft f ab. Die Verschiebung ist auch bei konstanter Anpresskraft explizit darstellbar. Allerdings lassen sich bei nicht verschwindenden Anpresskräften die Kontaktzeiten weder für die Kraft- noch für die Ortsbedingungen analytisch angeben.

* Corresponding author: e-mail: waltersberger@itm.uni-karlsruhe.de

Der Graf $g(\tau, D, f) = 0$ der normierten Kontaktzeiten τ abhängig von D und f ist jeweils für Orts- bzw. Kraftbedingung implizit gegeben. Für die beiden Bedingungen unterscheiden sich die Grafen nur wenig, sodass auf die Darstellung der Ortsbedingung hier verzichtet wurde, vgl. **Abb. 1 a**. Beide Grafen zeigen eine Auswölbung. Die Projektion ihrer Kammlinie auf die D - f -Ebene trennt den Bereich endlicher Kontaktzeit vom Bereich Haften.

Die Tangentialebene der Punkte auf der Kammlinie wird durch die τ -Achse nicht geschnitten, d.h. $(1 \ 0 \ 0) \nabla g(\tau, D, f) = 0$. Diese Bedingung kann geschlossen nach $\tau(D, f)$ aufgelöst und wieder in die Kontaktbedingung eingesetzt werden und man erhält eine implizite Abhängigkeit D von f , die nun wieder für Orts- und Kraftbedingung dargestellt ist, vgl. **Abb. 1 b**.

3 Anwendung auf Einzelstöße in Mehrkörpersystemen

Besteht Kontakt, so lassen sich die Bewegungsgleichungen des MKS wie folgt schreiben, wobei die als linearisierbar angenommene Nebenbedingung mit einem Penalty Verfahren behandelt wird:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{n}\lambda \quad \text{mit Nebenbedingung:} \quad g(\mathbf{q}) = 0 \quad (3)$$

$$\text{Penalty-Term:} \quad \lambda = -d\dot{z} - kz, \quad z = g(\mathbf{q})$$

$$\text{linearisierbare NB:} \quad z = \mathbf{n}_0^T (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0). \quad (4)$$

Es wird angenommen, dass sich die Lage des Systems während des Stoßes vernachlässigbar wenig ändert und die Kontaktzeiten kurz sind. Während des Stoßes wird nur die Bewegung in Normalenrichtung des Stoßes betrachtet. Nach Linearisierung kann die Bewegung durch eine einzelne skalare Gleichung beschrieben werden, die unter den obigen Stoßannahmen vom Schwingungstyp ist:

$$\begin{aligned} \tilde{m}\ddot{z} + \tilde{d}\dot{z} + \tilde{c}z &= \frac{1}{\tilde{m}} \mathbf{n}_0^T \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{F}} \quad \text{mit} \quad \tilde{m} = \frac{1}{\mathbf{n}_0^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{n}_0}, \\ \tilde{d} &= \left(d - \frac{1}{\tilde{m}} \mathbf{n}_0^T \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathbf{n}_0 (\mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0^T)^{-1} \right), \\ \tilde{c} &= \left(k - \frac{1}{\tilde{m}} \mathbf{n}_0^T \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{n}_0 (\mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0^T)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Mit der Vorgehensweise aus Abschnitt 2 kann nun z.B. entschieden werden, wie die Penalty Parameter d und k zu wählen sind, sodass Haften bzw. Lösen des Kontakts eintritt.

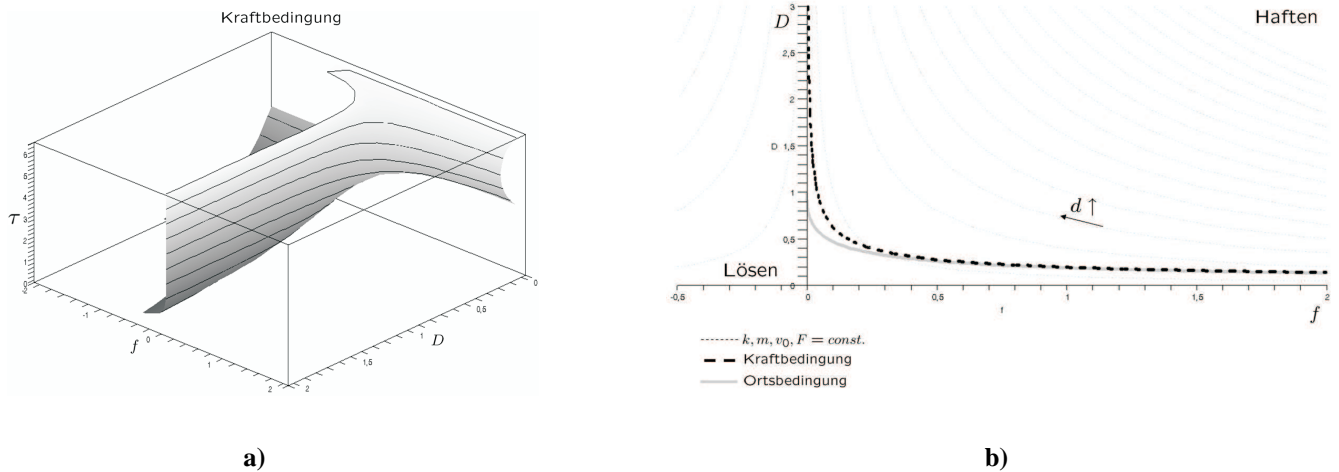


Abb. 1 a) Kontaktzeiten am Beispiel der Kraftbedingung. b) Grenzlinien für Orts-bzw. Kraftbedingung der Bereiche Haften und Lösen des Kontaktes.

Literatur

- [1] J. Achenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland Publishing, 1980.
- [2] R. Frischbier. *Zur Lösung des Körperstoßproblems*. ZAMM 57, 1977.
- [3] B. Hu, P. Eberhard, W. Schiehlen. *Symbolic Wave Propagation Analysis of Longitudinal Impacts of Rods*. Bericht 98/08 des Sonderforschungsbereichs 404, Universität Stuttgart, 1998.